Critère de Sylvester: 19

Gourdon – Algèbre p.233 et p.248-249
H2G2 p.327.

Th: $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\det(A_k) > 0$

où $A_k = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$.

App: $S = \left(\dfrac{1}{|i-j|+1}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Lemme: Soient E un espace vectoriel, q une forme quadratique sur E et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors $q_{|F}$ est définie $\Rightarrow F \oplus F^\perp = E$.

Dem Th: $\boxed{\Rightarrow}$ On note q la fq telque $\mathrm{Mat}_B(q) = A$ (B la base canonique).

q est donc def pos. Soit $k \in [\![1,n]\!]$, $E_k = \mathrm{Vect}((e_i)_{1 \leq i \leq k})$.

Alors $q_{|E_k}$ est def pos et donc elle est de signature $(k,0)$.

Ainsi d'après le théorème d'inertie de Sylvester, $\exists P \in GL_k(\mathbb{R})$ tel que:

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_k)}(q)}_{M_k} = {}^tP\, I_k\, P \Rightarrow \det(M_k) = \det(P)^2 > 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Raisonnons par récurrence sur n la taille de A.

- Si $n=1$, $\det(A_1) > 0$ par hypothèse donc OK.
- Supposons $n \geq 2$ et démontrons $n-1 \Rightarrow n$.

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, tel que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\det(A_k) > 0$. On note q la fq tel que $\mathrm{Mat}_B(q) = A$.

$A_{|E_{n-1}} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ par hypothèse de récurrence.

Ainsi $q_{|E_{n-1}}$ est def pos donc en particulier elle est non dégénérée.

Par le lemme, $E_{n-1} \oplus \underbrace{(E_{n-1})^\perp}_{= \mathrm{Vect}(e)} = E$

$= \mathrm{Vect}(e)$ car $\dim((E_{n-1})^\perp) = 1$.

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_{n-1},e)}(q)}_{= K} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \end{matrix} \\ 0 - 0 & q(e) \end{pmatrix}$$

Or K est congrue à A (car c'est la matrice dans une autre base de la même fq) donc $\exists Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $K = {}^tQ A Q$ comme $\det(A) > 0$ par hyp, $\det(K) > 0$ et donc $q(e) = \dfrac{\det(K)}{\det(A_{n-1})} > 0$.

Ainsi $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

dem App : (1) Soit $M : [0,1] \to \mathbb{R}$
$t \mapsto (t^{|i-j|})_{1\leq i,j\leq n}$ montrons que $\forall t \in]0,1[$, $M(t) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ en utilisant le théorème.

Montrons par récurrence sur $k \in [\![1,n]\!]$ que $\det(M_k(t)) > 0$.

- Si $k=1$, $\det(M_1(t)) = 1 > 0$.
- Supposons $k \in [\![1, n-1]\!]$ et démontrons $k+1$.

$$\det(M_{k+1}(t)) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & t^{k-1} & t^k \\ t & & t^{k-2} & t^{k-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ t^k & \cdots & t & 1 \end{vmatrix} \underset{C_{k+1} \leftarrow C_{k+1} - tC_k}{=} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & t^{k-1} & 0 \\ t & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ t^k & \cdots & t & 1-t^2 \end{vmatrix} = \underbrace{(1-t^2)}_{>0} \underbrace{\det(M_k(t))}_{\substack{>0 \\ \text{par HR}}}$$

(2) Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\forall t \in]0,1[$, ${}^tX M(t) X > 0$. Or l'application $t \mapsto {}^tX M(t) X$ est continue sur $[0,1]$ et positive donc elle est d'une part intégrable et d'autre part : $\int_0^1 {}^tX M(t) X\,dt > 0$ (car si elle était nulle on aurait par $\mathcal{C}^0$ que ${}^tX M(t) X = 0$ $\forall t$ et elle est bien positive par propriété de l'intégrale)

Or $\int_0^1 {}^tX M(t) X\,dt = {}^tX \int_0^1 M(t)\,dt\, X = {}^tX S X$.

dem Lemme :
- Si $x \in F \cap F^\perp$, on a $\varphi(x,x) = q(x) = 0$ car $q_{|F}$ est définie. (φ la fbs associée à q)
- Soit $(e_i)_{1\leq i\leq s}$ une base orthogonale de q.
Soit $x \in E$, on pose $\forall i \in [\![1,s]\!]$, $\lambda_i = \frac{\varphi(x,e_i)}{\varphi(e_i,e_i)}$ ($\varphi(e_i,e_i) \neq 0$ car $\varphi_{|F}$ est définie)
et $f = \sum_i \lambda_i e_i \in F$.
Or $\forall k \in [\![1,s]\!]$, $\varphi(x-f, e_k) = \varphi(x,e_k) - \varphi(f,e_k)$
$= \varphi(x,e_k) - \sum_i \lambda_i \varphi(e_i,e_k)$
$= \varphi(x,e_k) - \lambda_k \varphi(e_k,e_k)$
$= 0$
donc $x - f \in F^\perp$ et $x = x - f + f$.

$\boxed{///}$

Recasage : 152 - 158 - 170 - 171.